DS n°4 : ED, nombres réels, suites, etc.

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées
Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ± 1 point. Il n'est pas attendu que vous arrivez au bout du sujet (le barème dépassera 100 points). Faites primer la qualité sur la quantité.

Exercice 1 : Équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' - \dfrac{e^t}{e^t+1}y = \dfrac{e^t}{e^t+1}$

2) $\begin{cases} y'' + iy' + 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = i \end{cases}$

3) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{3}e^{-2x} + 3\left(x^2+1\right)$

Exercice 2 : Une équation différentielle d'ordre 3

On veut résoudre l'équation différentielle (E) : $y''' = y$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Déterminer une solution particulière non nulle de (E).

2) Soit g une solution de (E). On considère la fonction $h = g + g' + g''$.

- **a)** Montrer que h est solution d'une équation différentielle (E') d'ordre 1 à déterminer.
- **b)** En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g''(x) + g'(x) + g(x) = \alpha e^x \quad (E_\alpha)$$

- **c)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle (E_α).

3) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3 : Un théorème de point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire un point $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. On pose

$$T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leq x\}$$

1) Si $f = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}$, i.e. f est la fonction indicatrice de $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, que vaut T ?

2) Montrer que T possède une borne inférieure qu'on note m.

3) Montrer que $f(m)$ est un minorant de T.

4) Montrer que $f(T) \subset T$.

5) En déduire que $f(m) = m$.

Problème : étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$$

On admettra que cette suite est bien définie.

1) On cherche à déterminer la limite de (u_n). Il est recommandé de suivre scrupuleusement les sous-questions suivantes :

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
- **b)** Montrer que la suite (u_n) est monotone.
- **c)** Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

- **a)** Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_n uniquement.
- **b)** Montrer que la suite (v_n) est monotone et converge vers 2.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \dfrac{v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}{n}$.

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n(n+1)}\left((v_n - v_0) + (v_n - v_1) + \cdots + (v_n - v_{n-1})\right)$$

  En déduire que la suite (w_n) est décroissante.

- **b)** Montrer que la suite (w_n) converge vers un réel $l \geq 2$.
- **c)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2w_{2n} - w_n \leq v_n$. En déduire que $l \leq 2$, puis que $l = 2$.

4)

- **a)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer w_n en fonction de u_n, u_0 et n.
- **b)** Montrer que (nu_n^2) converge vers $\dfrac{1}{2}$.
- **c)** Déterminer $\alpha > 0$ tel que la suite de terme général $n^\alpha(u_{n+1} - u_n)$ converge vers une limite non nulle. Déterminer cette limite.

Comment rendre amoureux deux hippies ? On leur applique l'exponentielle et ils ne font plus qu'un !